

УДК 165.151

DOI: 10.17223/1998863X/47/8

А.В. Хлебагин

ИМПЛИЦИТНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ В ТЕОРИИ ИСТИНЫ И В МАТЕМАТИКЕ¹

Показано, что обоснование принятия принципа рефлексии в случае теории истины и использование автономной прогрессии в случае выявления имплицитных допущений при принятии математической теории свидетельствуют в пользу возможности экспликации логико-синтаксическими средствами семантических по содержанию концепций истины и имплицитных допущений принятия математических теорий. Это является весомым аргументом в пользу как дефляционной концепции истины, так и утверждения о возможности экспликации семантического содержания формально-математических концепций синтаксическими средствами теории.

Ключевые слова: *имплицитные допущения, теория истины, принцип рефлексии.*

Ставшие классическими для современной философской логики ограничительные результаты К. Геделя и А. Тарского зачастую трактуются, среди прочего, как окончательная демонстрация невозможности выражения семантических характеристик теории синтаксическими средствами. Вместе с тем казавшиеся прежде незыблемыми результаты в последние десятилетия подвергаются значительной ревизии. Так, стремление преодолеть иерархический подход А. Тарского к определению понятия истины породило весьма широкое и бурно развивающееся направление безтиповых теорий истины, пионером которого можно считать С. Крипке. Ниже мы предлагаем анализ возможности выражения синтаксическими средствами семантических характеристик теории применительно к проблеме выявления имплицитно принимаемых обязательств, возникающих в результате принятия математической теории и аксиоматической теории истины.

Принятие системы S может предполагать, что некоторые компоненты процесса обоснования не выразимы и даже не формализуемы в самом языке S , т.е. являются имплицитными. Суть понятия «имплицитные обязательства» заключается в том, что принятием теории S мы обязываемся к принятию набора формальных или квазиформальных утверждений, которые невыразимы или недоказуемы в самой S . Разработка концепции имплицитных обязательств восходит к 50–60-м гг. XX в., и одним из классических прояснений ее назначения является утверждение С. Фефермана: «До какой степени содержание математической мысли может быть проанализировано в формальных терминах? Теоремы Геделя показывают неадекватность единственной формальной системы для этого, за исключением ограниченных частей математики. Несмотря на это, в то же самое время они указывают на возможность систематического производства все больших и больших систем, чья приемлемость имплицитно содержится в исходной теории. Средством для этого является то, что стало известно под названием принципы рефлексии» [1. Р. 1].

¹ Статья подготовлена при поддержке Российского научного фонда, проект № 16-18-10359.

Исходная постановка проблемы имплицитных допущений С. Феферманом была тесно связана с его программой оснований математики. Избегая этой связи с целью представить имплицитные допущения как более общую проблему, примем ее следующую формулировку: принятие формальной системы S обязывает к принятию дополнительных ресурсов, недоступных в самой исходной системе S . Необходимо отметить многообразие трактовок того, что следует понимать под «дополнительными ресурсами», к принятию которых нас обязывает принятие формальной системы. Некоторые, вслед за С. Феферманом, имеют в виду концептуальные ресурсы, которые недоступны непосредственно в S в силу «геделевского феномена», такие, например, как принцип рефлексии или утверждение о непротиворечивости. Им противостоит точка зрения, согласно которой, чем бы ни являлись те ресурсы, к принятию которых нас обязывает принятие S , они должны быть выразимы в языке самой исходной системы S [2]. Наиболее распространенная точка зрения связана с тем, что прояснение имплицитно принимаемых дополнительных ресурсов должно быть в явном виде связано с обращением к содержанию понятия истины [3, 4].

Обоснованность принятия принципа рефлексии оказывается одним из ключевых аспектов как в обсуждении имплицитных допущений принятия формальной системы, так и в определении того, каким содержанием обладает понятие истины. Наиболее популярная в последние десятилетия дефляционная концепция истины, согласно которой это понятие не имеет никакого семантического и метафизического содержания, а является исключительно логико-математическим по своей природе, столкнулась с серьезными возражениями в связи с обоснованностью одной из наиболее популярных своих формулировок – дисквотационной теорией истины, согласно которой единственная функция этого понятия – это функция раскавычивания. Классической формулировкой дисквотационной концепции истины является известная теория ТВ, которая включает в себя все аксиомы РАТ, т.е. арифметики Пеано, сформулированной в языке L_T , в том числе все примеры схемы индукции с предикатом истины. Возражения против дисквотационной концепции истины указывают на то, что, во-первых, композиционный характер истины не выражен аксиомами дисквотационной теории, а во-вторых, что дисквотационная концепция не выражает в полной мере ту роль, которую понятие истины играет в математических и метаматематических рассуждениях [4, 5]. Если композиционная теория истины способна обосновать использование принципа рефлексии, то дисквотационная слишком слаба для этой цели.

Сформулируем более строго концепции, к которым нам далее придется обращаться. Прежде всего, это касается принципа рефлексии. Необходимо различать следующие его формулировки [6. Ch. 22]:

Локальный принцип рефлексии (Rfn_s) представляет собой схематичный принцип формы $Prov_s(\varphi) \rightarrow (\varphi)$, где φ пробегает по предложениям некоторого языка L , S является теорией, сформулированной на языке L , а $Prov_s$ – канонический предикат доказуемости для S .

Единообразный принцип рефлексии (RFN_s) представляет собой схематичный принцип формы $\forall x : Prov_s(\varphi(x)) \rightarrow (\varphi)$, где $\varphi(x)$ пробегает по формулам с одной переменной некоторого языка.

Глобальный принцип рефлексии (GRP_s) является аксиомой формы $\forall \varphi \in L : \text{Prov}_s(\varphi) \rightarrow T\varphi$.

Наконец, принцип рефлексии выражает одно из основных свойств понятия истины, его своего рода распределенность по логическим символам:

$$\forall \varphi, \psi \in L_{PA} : T(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow [T(\varphi) \wedge T(\psi)].$$

Интересующая нас проблема возникает в следующей связи. Наиболее простым выражением дефляционной концепции истины является дисквотационная теория. Утверждение, что единственной функцией понятия истины, ясно представленной в концепции А. Тарского, высказывалось множество раз. Один из наиболее известных его защитников, У. Куайн, пишет: «Предикат истины является инструментом раскавычивания. Мы можем согласиться с единичным предложением, повторив его, обойдясь без помощи кавычек или предиката истины; но если мы хотим утверждать некоторое бесконечное множество предложений, которое мы можем разграничивать только говоря о предложениях, тогда начинается использование предиката истины» [7. P. 307].

Теория ТВ не влечет композиционный принцип: дисквотационная теория имеет дело с конечным количеством Т-предложений, тогда как композиционный принцип относится к бесконечному множеству предложений. Более того, как указывают С. Шапиро и Дж. Кетланд, в случае достаточно сильной исходной теории S мы рассчитываем, что теория истины позволит доказать Геделево предложение G_s теории S и локальный принцип рефлексии (Rfn_s). Если мы берем в качестве исходной теории Арифметику Пеано, от ТВ мы ожидаем возможности доказать G_{PA} и Rfn_{PA} . Но этого не произойдет по причине консервативности теории ТВ по отношению к исходной PA. Фактически это служит основанием для предпочтения композиционной теории СТ, включающей в принцип композиционной в качестве аксиомы. СТ не консервативна по отношению к PA и в ней может быть доказан глобальный принцип рефлексии (GRP_{PA}), а на его основе и доказуемых в СТ Т-предложений PA может быть доказан локальный принцип рефлексии Rfn_{PA} , недоказуемый в исходной теории PA.

Пока мы имели дело с типовыми теориями истины. Данный тип теорий истины является наиболее распространенным, и не в последнюю очередь в силу влияния традиции. А. Тарский положил начало типовому подходу в теориях истины. Выделение типов языков – языка-объекта и метаязыка – рассматривается в его семантической теории как средство предотвращения парадоксов. Это решение становится попросту магистральным для современной логики. В подходе А. Тарского язык можно уподобить тому, сто в современной теории называется дедуктивно системой или теорией; в семантической теории аксиомы и правила языка-объекта не важны, принципиальную роль играют аксиомы и правила метаязыка. Например, в типовых теориях ТС и СТ языком-объектом является язык L арифметики с ассоциированной системой PA, а метаязыком – тот же самый язык, расширенный единственно добавлением предикатного символа Т для предиката истины. В любом случае объектная теория – это подтеория метатеории, сформулированной в языке L_T . Тем самым задается иерархия теорий, в которой теория RT_γ является метаязыком для $RT_{<\gamma}$.

Как таковой, типовой подход не обязан своим возникновением ни А. Тарскому, ни парадоксу Лжеца; он уже был хорошо известен до появления семантической теории истины и применялся ко множествам, универсалиям и понятиям. А. Тарский распространяет этот подход на проблему определения предиката истины. В общем виде, не ограничиваясь только теорией А. Тарского, можно сказать, что типовой подход заключается в наложении синтаксических ограничений на выражения языка: термины языка разделяются на типы и применение предиката истины ограничивается определенным типом. Ограничения на применение предиката истины могут получить разные выражения, например через кодировку формул натуральными числами, когда кодируются только предложения L , не содержащие предикат истины. Типовой подход применим как к семантическим, так и к синтаксическим теориям истины. В случае языка, содержащего типы переменных и ограничения на формулировку формул, мы можем либо задать семантику, либо сформулировать аксиомы для этого языка. В первом случае получим семантическую теорию с синтаксическими типами, а во втором – аксиоматическую теорию с синтаксическими типами. И наоборот, возьмем язык L_T без каких-либо синтаксических ограничений и зададим для него в первом случае – семантику, а во втором – аксиоматическую систему в языке, представляющие его типовую структуру. В последнем случае мы получим семантически типовую аксиоматическую теорию истины. Очевидно, что синтаксический типовой подход одинаково возможен, хотя и влечет нотационные сложности.

В случае семантических теорий истины различие типовых и бестиповых теорий не вызывает особых трудностей: модель для языка L_T с предикатом истины будет типовой, если ни один номер предложения, содержащего предикат истины, не окажется в объеме предиката истины. В ином случае это будет бестиповая модель. В случае различения типовых и бестиповых аксиоматических теорий возникают определенные сложности, связанные с необходимостью предварительно прояснить, что вообще считается теорией истины, для какого рода теорий они строятся и т.п. Здесь будет достаточно весьма общего (двойного) критерия различения типовых и бестиповых аксиоматических теорий истины, предложенного В. Хэлбахом [6]. Аксиоматическая теория истины является типовой, если выполнен по крайней мере один из указанных критериев:

- (а) Теория доказывает, что только L -предложения истинны (или, возможно, что предложения с предикатом истины ложны);
- (б) Теория не накладывает никаких ограничений на истинность предложений с предикатом истины.

Возражения против типовых теорий могут быть связаны с тем, что бестиповые теории в большей степени позволяют выразить обобщающую функцию понятия истины: например, если мы хотим утверждать об истинности всех тавтологий теории, предполагается, что это будет и о тех тавтологиях, которые содержат в себе предикат истины. Естественно, типовые теории предполагают исключение последних из их числа. Так, С. Феферман [1] построил бестиповую теорию KF (теория Фефермана–Крипке) и ее теоретико-доказательный анализ в терминах бесконечных конъюнкций показал, что типовая теория, например ST, может доказать лишь небольшой фрагмент из доказуемого в KF. Вся проблематика, связанная с обязательствами принятия

принципа рефлексии для теории истины, рассмотренная в связи с типовыми теориями (ТВ и СТ), сохраняется и в случае бестиповых теорий, в частности в связи с бестиповой теорией композициональной истины Фефермана – Крипке (KF). Таким образом, вопрос о необходимости или допустимости признания принципа рефлексии с принятием теории истины оказывается общим для всех подходов к построению теории истины.

Обсуждение возможности и даже допустимости принятия принципа рефлексии как следствия принятия определенной теории истины породило различные позиции. Так, Н. Теннант настаивает на том, что не требуется вообще никаких дополнительных обоснований для принятия принципа рефлексии: «Никакого дополнительного обоснования не требуется для новых обязательств, порождаемых выражением наших более ранних обязательств. Как только мы допустили процесс рефлексии и выразили это через принцип рефлексии, мы уже тем самым получили объяснение того, почему принятие теории S обязывает нас принимать все случаи принципа рефлексии» [2. Р. 92]. Фактически Н. Теннант утверждает простое постулирование принципа рефлексии. Этой точки зрения противостоит позиция Дж. Кетланда, согласно которой принятие принципа рефлексии заключается в осознании истинности каждой теоремы PA и выражается заключением «я готов признать каждую теорему PA». Он оспаривает тот факт, что локальный принцип рефлексии адекватно выражает это: «Нужно заметить, что это не стандартное утверждение. Обычно схема рефлексии вроде Rfn_{PA} выражает обоснованность PA: чтобы ни доказывалось в PA, является истинным. И быть истинным – не то же самое, что быть принятым». [5. Р. 430]. Эти две крайние позиции опосредуются промежуточной, сформулированной Ц. Цислинским [3], демонстрирующей возможность обоснования признания принципа рефлексии в результате перехода от СТ (композициональной теории истины, аксиома индукции которой не содержит предикат истины) к СТ. В этом противостоянии различных точек зрения на обоснованности принятия обязательств по отношению к принципу рефлексии нам кажется продуктивным подход, предложенный Л. Хорстеном и Г. Лэйом [8]. В его рамках обязательство принятия принципа рефлексии проистекает из нашей веры в арифметику, базовые законы логики и исходный набор непроблематичных T-предложений: «...это очевидно из того, как мы обращаемся с тем, что утверждается базовой арифметикой и базовой дисквотационной теорией истины. Так же как наши данные восприятия интегрированы в нашу систему вер, наши доказательства в арифметике интегрированы в нашу систему вер. ...Аналогично и наши рассуждения в рамках дисквотационной теории интегрированы в нашу общую систему вер». [Ibid. Р. 19–20]. Принцип рефлексии выражает нашу веру в теорию; как показывает В. Хэлбах, наше принятие дисквотационной теории истины выражается универсальным принципом рефлексии для ТВ [9. Р. 1963]. Мы можем, хотя и вовсе не обязаны, рассуждать о нашем принятии арифметики или теории истины, и в случае, если мы обратимся к этому, наша вера в принимаемую теорию будет выражена посредством принципа рефлексии. И в этом случае исходная теория будет расширена, и вера в эту расширенную теорию будет имплицитно содержаться в расширенной теории. Итерация может быть, естественно, продолжена.

Аналогичную ситуацию с выявлением имплицитных допущений принимаемой теорией мы наблюдаем и в случае математической теории, а не только применительно к теории истины. Здесь центральной выступает концепция автономной прогрессии теории, разработанная Г. Крайзелем и С. Феферманом. Оно происходит из следующего вопроса: что имплицитно содержится в принятии определенной математической теории, что мы должны принять в качестве обязательств в случае согласия с теорией? Это говорит нам, в свою очередь, что мы можем обоснованно принять, обоснованно принимая исходную теорию.

Мы признаем математическую систему, если верим, что эта теория обладает определенными желательными или необходимыми, в свете наших задач и интересов, свойствами. Очевидно, что если теория противоречива, то мы не принимаем ее; вместе с тем, признавая теорию, мы признаем ее непротиворечивость. Или же, например, можно утверждать, что, признавая систему, мы признаем ее обоснованность, а тем самым та или иная форма принципа рефлексии будет имплицитно приниматься нами в результате признания системы. Но теорема К. Геделя говорит нам, что ни доказательство противоречивости, ни принцип рефлексии для теории S не могут быть получены в самой S . Таким образом, согласно такому пониманию «признания системы» мы имплицитно, вместе с системой, принимаем что-то выходящее за ее пределы. Как указывает С. Феферман: «Теорема Геделя указывает на возможность систематически производить все большие и большие системы, чье принятие подразумевается принятием исходной системы» [1. Р. 2]. Автономная прогрессия является наиболее естественной формулировкой такого систематического порождения для любой трактовки «признания системы».

Помимо того, что мы должны принять, признавая систему S , понятие автономной последовательности предлагает и ответ на вопрос о том, что мы можем принять на тех же самых фундаментальных основаниях, признавая S . Типичным примером такой идеи является подход С. Фефермана к предикативизму: коль скоро признана система S , все определимые в S множества могут быть обоснованно постулированы и квантификация по ним допущена; мы можем автономно повторить эту процедуру и достичь системы предикативного анализа.

Вполне естественным подходом к понятию «признания системы» является взгляд, согласно которому признание системы S имеет в виду то, что мы принимаем S как истинную. Что значит признать теорию как истинную? Рассмотрим следующую интерпретацию: когда мы признаем систему S_0 , то имплицитно принимаем ее в качестве истинной; мы добавляем новый предикат T к S_0 (на основании теоремы о неопределимости Тарского) для выражения ее истинности; так как мы признали S_0 в качестве истинной, аксиомы, что « T выражает предикат истины для языка S_0 » и « S_0 истинно (в терминах предиката T)» могут и должны быть приняты. Таким способом мы достигаем и принимаем новую систему S_1 . И мы можем повторить эту процедуру производства (и принятия) S_0, S_1, \dots, S_n и повторяя бесконечно много раз этот шаг до достижения хорошо-упорядоченности.

Прогрессия зависит от аксиом для предиката истины. «Это очень глубокий и сложный вопрос: какими аксиомами и правилами должна быть охарактеризована математическая истина?» [10. Р. 915]. Наиболее известная такая

характеристика дана в семантической теории А. Тарского, и ординалом его (предиката) автономной прогрессии является ординал Фефермана – Шютте Γ_0 . Однако теория истины А. Тарского типовая и не допускает самоприменимости истины. Бестиповые аксиоматические теории истины являются более подходящими для решения этой задачи. Вопрос о выборе аксиом для бестиповой теории истины, особенно об их способности выразить философские представления, в высшей степени сложный как с логико-математической, так и с логико-философской точки зрения. На данный момент можно утверждать, что среди существующих аксиоматических бестиповых теорий наиболее формально корректной и при этом обладающей значительной теоретико-доказательной мощью является предложенная А. Кантини система VF [11]. К. Фуджимото установил [10], что именно система VF наиболее перспективна для использования автономной прогрессии в целях выявления имплицитных допущений принятия математической теории.

На наш взгляд, сама проблема выявления имплицитных допущений, как в случае принятия математической теории, так и в случае принятия теории истины, еще далека от окончательного разрешения. Обсуждение указанных проблем несомненно важно как для оснований математики, так и для решения проблемы построения аксиоматических теорий истины и выявления степени адекватности и полноты выражения ими философских представлений, лежащих в их основании. Но нам представляется, что сказанного вполне достаточно для утверждения того факта, что современная философская логика в состоянии предложить логико-синтаксические средства экспликации семантических по своей сути концепций истины и имплицитных допущений принятия математических теорий. Это, в свою очередь, весомый аргумент как в пользу дефляционной концепции истины, трактующей последнюю в качестве исключительно логико-математического понятия, так и в пользу утверждения о возможности экспликации семантического содержания формально-математических концепций синтаксическими средствами.

Литература

1. *Feferman S.* Reflection on incompleteness // *The Journal of Symbolic Logic.* 1991. Vol. 56, № 1. P. 1–49.
2. *Tennant N.* Deflationism and the Gödel phenomena // *Mind.* 2002. Vol. 111. P. 551–582.
3. *Cieslinski C.* Truth, Conservativeness, and Provability // *Mind.* 2010. Vol. 119. P. 409–422.
4. *Shapiro S.* Proof and Truth: Trough thick and thin // *Journal of Philosophy.* 1998. Vol. 95. P. 493–521.
5. *Ketland J.* Deflationism and Tarski's Paradise. // *Mind.* Vol. 108. 1999. P. 69–94.
6. *Halbach V.* Axiomatic theories of truth. Cambridge University Press, 2014.
7. *Quine W.V.* Philosophy of Logic. Cambridge, MA : Harvard University Press, 1970.
8. *Horsten L., Leigh G.* Truth is simple // *Mind.* 2017. Vol. 126. P. 195–232.
9. *Halbach V.* Disquotational Truth and Analyticity // *Journal of Symbolic Logic.* 2011. Vol. 66. P. 1959–1973.
10. *Fujimoto K.* Autonomous progression and transfinite iteration of self-applicable truth // *The Journal of Symbolic Logic.* 2011. Vol. 76, № 3. P. 914–945.
11. *Cantini A.* Logical frameworks for truth and abstraction. Elsevir, 1996.

Aleksandr V. Khlebalin, Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: sasha_khl@mail.ru

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science. 2019. 47. pp. 79–86.

DOI: 10.17223/1998863X/47/8

IMPLICIT COMMITMENT IN TRUTH THEORY AND IN MATHEMATICS**Keywords:** implicit commitment; reflection principle; truth theory.

The restrictive results of Kurt Gödel and Alfred Tarski are often interpreted as a final demonstration for the impossibility of expressing the semantic characteristics of a theory by syntactic means. At the same time, the seemingly unshakable results have undergone significant revisions in recent decades. For example, the desire to overcome the hierarchical approach to the truth definition gave rise to the rapidly developing direction of creating untyped truth theories, going back to Saul Kripke. The article offers an analysis for the possibility of expressing, by syntactic means, the semantic characteristics of a theory applied to the problem of implicit commitments arising from the adoption of a mathematical theory and the axiomatic truth theory. The very problem of identifying implicit commitments, both in the case of adopting a mathematical theory, and in the case of adopting the truth theory, is far from its final resolution. The article shows that the rationale for adopting the principle of reflection in the case of the truth theory and the application of an autonomous progression in the case of implicit commitments for a mathematical theory adopting shows that modern philosophical logic is able to offer logical-syntactic tools for explication of semantic concepts of truth and implicit commitment for adopting a mathematical theory. This is a serious argument both in favor of the deflationary concept of truth, which interprets the latter as an exclusively logical-mathematical concept, and in favor of the statement that the semantic content of formal-mathematical concepts can be explicated by syntactic means.

References

1. Feferman, S. (1991) Reflection on incompleteness. *The Journal of Symbolic Logic*. 56(1). pp. 1–49. DOI: 10.2307/2274902
2. Tennant, N. (2002) Deflationism and the Gödel phenomena. *Mind*. 111. pp. 551–582.
3. Cieslinski, C. (2010) Truth, Conservativeness, and Provability. *Mind*. 119. pp. 409–422. DOI: 10.1093/mind/fzq034
4. Shapiro, S. (1998) Proof and Truth: Trough thick and thin. *Journal of Philosophy*. 95. pp. 493–521. DOI: 10.5840/jphil199895102
5. Ketland, J. (1999) Deflationism and Tarski's Paradise. *Mind*. 108. pp. 69–94.
6. Halbach, V. (2014) *Axiomatic theories of truth*. Cambridge University Press.
7. Quine, W. V. (1970) *Philosophy of Logic*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
8. Horsten, L. & Leigh, G. (2017) Truth is simple. *Mind*. 126. pp. 195–232. DOI: 10.1093/mind/fzv184
9. Halbach, V. (2011) Disquotational Truth and Analyticity. *Journal of Symbolic Logic*. 66. pp. 1959–1973. DOI: 10.2307/2694987
10. Fujimoto, K. (2011) Autonomous progression and transfinite iteration of self-applicable truth. *Journal of Symbolic Logic*. 76(3). pp. 914–945. DOI: 10.2178/jsl/1309952527
11. Cantini, A. (1996) *Logical frameworks for truth and abstraction*. Elsevier.